

CIBIM 10, Oporto, Portugal, 2011

RM Natal Jorge, JMRS Tavares, JL Alexandre, AJM Ferreira, MAP Vaz (Eds)

CIBEM 10, Porto, Portugal, 2011

AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA CONVERGÊNCIA DE SOLUÇÃO ENTRE MODELOS DE LAJE

António Gorgulho^{1*}, Eduardo Morais¹, José Alberto Rodrigues^{1 2†}

1- Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, Portugal, email: *sgorgulho@dec.isel.pt, †jrodri@adm.isel.pt

2- CMAT-Universidade do Minho, Campus Gualtar, Braga

Palavras chave: Elasticidade linear, Kirchhoff, Método dos Elementos Finitos, freeFEM++**Resumo**

P.-G. Ciarlet e Destuynder mostraram teoricamente, em [2] e [3], a convergência da terceira componente do campo de deslocamentos, no modelo tridimensional da elasticidade linear, para o deslocamento vertical do modelo bidimensional de Kirchhoff para uma laje. Esta convergência corresponde à natural convergência da espessura da laje para zero.

Com este trabalho verificamos numericamente a convergência entre os referidos modelos. Para tal usamos uma discretização em elementos finitos do problema tridimensional implementada usando o programa freeFEM++ e uma aproximação do problema bidimensional fornecida pelo programa SAP2000, com base no modelo de Kirchhoff. São analisados três casos distintos, comparando-se em cada um os respectivos deslocamentos e momentos flectores.

1. Introduo3o

A utiliza3o de placas finas 3 generalizada em toda a engenharia estrutural, por exemplo nas estruturas edif3cios, de pontes, estruturas navais ou aeron3uticas. Essas placas s3o frequentemente sujeitas a for3as que actuam sobre o plano da placa. Se as for3as forem suficientemente pequenas, o equil3brio 3 est3vel e as tens3es resultantes s3o caracterizados pela aus3ncia de movimentos laterais.

Dentro da an3lise da elasticidade linear, a modela3o de placas pode ser vista como uma simplifica3o do modelo tridimensional cl3ssico que estuda o comportamento de um material isotr3pico e homog3neo sob a ac3o de for3as externas, sendo a sua caracter3stica mais importante a possibilidade da redu3o a um problema de duas dimens3es.

Um dos modelos 3 o modelo de Kirchhoff [5]. Este descreve o deslocamento de uma placa de pequena espessura sob o efeito de uma for3a transversal. Aqui s3o feitas simplifica3es no deslocamento segundo a direc3o z , resultando um modelo bidimensional cujas inc3gnitas s3o o deslocamento vertical e os 3ngulos de rota3o das fibras normais 3 superf3cie m3dia da placa em rela3o aos eixos de x e y .

Usando os dois modelos, calculamos os esfor3os solicitantes nos pavimentos de bet3o armado, formados por vigas e lajes maci3as, n3o considerando a interac3o entre estes elementos estruturais o que se faz assumindo a rigidez de ambos igual e uma redistribui3o dos esfor3os homog3nea.

Neste trabalho usaremos o M3todo dos Elementos Finitos para analisar dois tipos de pavimentos em bet3o armado, cosntitu3dos por vigas e lajes maci3as tridimensionais modelados pelo modelo cl3ssico da elasticidade linear. Validaremos os resultados obtidos com o modelo de Kirchhoff implementado no SAP2000.

Em todos os casos estudados atendemos a dois requisitos: a solu3o n3o se afasta muito da solu3o el3stica, para garantir um bom funcionamento da estrutura utilizada; 3 garantido o equil3brio do pavimento como um todo. Desta forma, asseguramos que os modelos estudados podem ser utilizados para projetar os pisos de edif3cios de bet3o armado.

2. Elasticidade Linear

Consideramos uma laje sem deforma3o

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \subset \mathbb{R}^3$$

Ap3s deforma3o da laje assumimos que um ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ se move para a posi3o $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. O vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$ 3 designado por vector de deslocamento.

Supondo pequenas deforma3es obtemos o tensor das deforma3es:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Tomemos o plano infinitesimal $\Delta\Pi(x)$ centrado em x com o vector normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, a superf3cie sobre $\Delta\Pi(x)$ em x 3

$$(\sigma_{1j}(x)n_j, \sigma_{2j}(x)n_j, \sigma_{3j}(x)n_j), j \in \{1, 2, 3\}$$

com $\sigma_{ij}(x)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ o tensor das tens3es em x . A lei de Hooke garante uma rela3o linear entre os tensores das tens3es e das deforma3es:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

no caso de material isotr3pico e homog3neo, sendo λ, μ as constantes de Lam3 e δ_{ij} o simbolo de Kronecker. Se o corpo estiver submetido a uma for3a $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ a condi3o de equil3brio 3

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, 3 qual se acrescentam as condi3es de fronteira, a definir caso a caso.

Desigando a formula3o anterior por formula3o forte, com vista 3 implementa3o pelo M3todo dos Elementos Finitos somos conduzidos 3 formula3o fraca

$$\iiint_{\Omega} \lambda \text{div} \vec{u} \text{div} \vec{v} + 2\mu \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega$$

definida em espa3os de admissibilidade. Neste caso iremos utilizar como fun3es admiss3veis, aquelas que s3o cont3nuas em toda a regi3o Ω , polinomiais de grau k ($= 1$ ou 2) sobre cada elemento da discretiza3o de Ω e que verificam as condi3es de fronteira do tipo Dirichlet [4].

3. Modelo de Kirchhoff para Flex3o em Lajes

Como anteriormente, consideremos

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], (x_1, x_2) \in A \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Onde A 3 o plano m3dio (representado na figura 1) e h a espessura da laje.

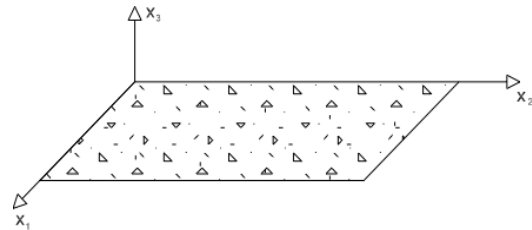


Figura 1: Plano m3dio da laje para o modelo de Kirchhoff

O modelo de Kirchhoff para lajes 3 descrito sobre tr3s graus de liberdade: uma transla3o vertical e duas rota3es:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \theta_1(x_1, x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \theta_2(x_1, x_2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2)$$

onde $w(x_1, x_2)$ representa a transla3o vertical, $\theta_1(x_1, x_2)$ a rota3o no plano x_1Ox_3 e $\theta_2(x_1, x_2)$ a rota3o no plano x_2Ox_3 , graus de liberdade relativos ao plano m3dio da laje.

Desprezando as deforma3es por corte, podemos simplificar este modelo obtendo-se uma 3nica inc3gnita: a transla3o vertical $w(x_1, x_2)$, obtendo-se:

$$\theta_1(x_1, x_2) = -\frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$\theta_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Finalmente, podemos obter a relação entre momentos flectores e tensões:

$$m_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3$$

com $i, j \in \{1, 2\}$.

4. Abordagem ao freeFEM++

O freeFEM++ é um sistema de implementação do método dos elementos finitos, com uma linguagem específica, permitindo resolver numericamente problemas de equações diferenciais parciais. Os problemas são descritos na sua forma variacional, existindo uma correspondência com a linguagem do freeFEM++, o que o torna muito didáctico.

A equação

$$\iiint_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} d\Omega$$

é implementada em freeFEM++ através da sequência de instruções

```
solve Lame([u1,u2,u3],[v1,v2,v3], solver=CG)//UMFPACK=
int3d(Th) ( (lambda)*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3) +
2.*mu*( epsilon(u1,u2,u3)*epsilon(v1,v2,v3) )
) - int3d(Th)(gravidade*v3) // forças mássicas
- int2d(Th,10)(carga*v3) // forças de superfície
+ on(1,u1=0,u2=0,u3=0); // cond Dirichlet
```

Os operadores diferenciais, ou outros, podem ser introduzidos como macros, com relativa facilidade

```
real sqrt2=sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3), (dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,
[(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2, (dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // EOM
```

Temos a opção de definir a região e respectiva discretização com instruções próprias

```
int[int] rup=[0,10], rdow=[0,0], rmid=[1,1,2,1,3,1,4,1] ;
mesh Thxy = square(nx,ny,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]);
mesh3 Th=buildLayers(Thxy,nz, zbound=[z0+hv,z1+hv],
labelmid = rmid, labelup = rup, labeldown = rdow);
```

ou usando programas externos como por exemplo GMSH

```
load "mesh3"
load "medit"
mesh3 Th("regiao.mesh");
```

Finalmente, a visualização dos resultados também pode ser feita com instruções próprias

```
// RESULTADOS
real
dmax= u3[].max,
dmin= u3[].min,
coef=abs(1/dmin);
mesh3 Th= movemesh3(Th, transfo=[x+u1,y+u2,z+u3*coef]);
savemesh(Th,"malha_d.mesh");
plot (Th,ps="m1000.png");
plot ([u1,u2,u3], wait=1, ps="lame3d.eps", coef=coef);

//registo das coordenadas dos vertices dos tetraedros para GMSH
cout<<" elementos "<<Vh.nt;
for (int i=0; i< Th.nt; i++)
{
file<<"VS(";

for (int j=0; j<3; j++)
file<< Th[i][j].x
<<","<< Th[i][j].y
<<","<< Th[i][j].z<<",";

file<< Th[i][3].x<<","<< Th[i][3].y<<","<< Th[i][3].z;
file<<"){"<<endl;

//registo dos deslocamentos em cada vertice
for (int j=0; j<3; j++)
file<<u1(Th[i][j].x, Th[i][j].y, Th[i][j].z)<<","
<<u2(Th[i][j].x, Th[i][j].y, Th[i][j].z)<<","
<<u3(Th[i][j].x, Th[i][j].y, Th[i][j].z)<<","<<endl;
file<<u1(Th[i][3].x, Th[i][3].y, Th[i][3].z)<<","
<<u2(Th[i][3].x, Th[i][3].y, Th[i][3].z)<<","
<<u3(Th[i][3].x, Th[i][3].y, Th[i][3].z)<<endl<<"}<<endl;
}

file<<"}<<endl;
```

5. Caso 1: Laje encastrada em todos os bordos

Começamos por considerar uma laje encastrada em todos os bordos com 5 m nos dois vãos e 16 cm de altura. Quanto ao material, tem-se um betão C20 / 25 com um módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6$ kPa e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,15$. Considera-se como acções o peso próprio para um peso específico de 25 kN / m³ (resultando numa carga de superfície $25 \times 0,16 = 4$ kN / m² no modelo de Kirchhoff e uma carga de superfície de 4 kN / m²). A figura 2 apresenta obtidos em freeFEM++ e na tabela 1 comparamos os resultados obtidos com ambos modelos. Consideramos como condições de fronteira, neste caso, encastramentos perfeitos em todos os bordos ($u_1=0$, $u_2=0$ e $u_3=0$).

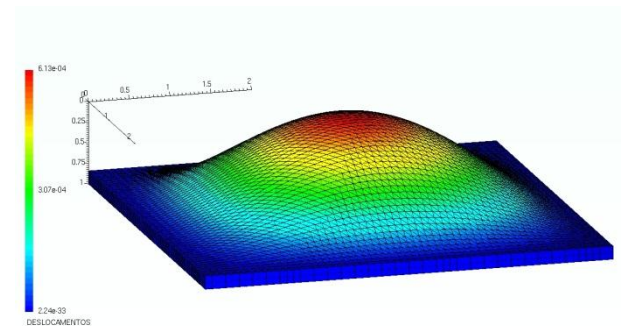


Figura 2: Deslocamentos numa laje encastrada sujeita a uma carga de superfície, vista invertida

Tabela 1: Tabela comparativa de resultados

	freeFEM++	SAP2000	%
Tempo	277 seg.	-	-
u_3	-0,613	-0,597	-2,58
m_x^+	4,081	4,270	-4,43
m_x	-10,329	-10,244	-0,82
m_y^+	4,081	4,270	-4,43
m_y	-10,329	-10,244	-0,82

6. Caso 2: Laje simplesmente apoiada em quatro pilares

Neste caso, consideramos uma laje rectangular com quatro pilares nos quatro cantos, com 5 m em ambos os vãos e 16 cm de altura. Quanto ao material, apresenta um betão C20 / 25 com um modulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6$ kPa e um coeficiente de Poisson de $\nu = 0$. Tomamos como acções o peso próprio para um peso específico de $25 \text{ kN} / \text{m}^3$ e uma carga de superfície de $4 \text{ kN} / \text{m}^2$. Simulamos o efeito dos pilares, impondo todos os cantos são apoios simples ($u_3=0$), como condições de fronteira.

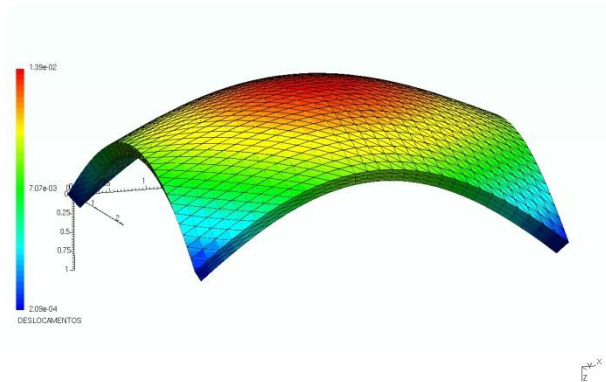


Figura 3: Deslocamentos numa laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga de superfície, vista invertida

Tabela 2: Tabela comparativa de resultados

	freeFEM++	SAP2000	%
Tempo	228 seg.	-	-
u_3	-13,932	-13,827	-0,75
m_x^+	31,920	31,950	-0,09
m_x	0	0	0
m_y^+	31,920	31,950	-0,09
m_y	0	0	0

7. Conclusões

Neste trabalho fizemos a comparação de soluções de modelos bidimensionais e tridimensionais de lajes. Constatamos que a aproximação dos deslocamentos é melhor no caso de uma laje simplesmente apoiada (caso 2). No caso 1, laje encastrada evidenciamos um fenómeno de camada limite, nas imediações das fronteiras da laje, que deve ser tratado com uma estratégia adaptada com vista a melhorar o problema tridimensional.

O estudo aqui feito pode-se alargar a outros problemas de lajes correspondentes a outro tipo de condições de fronteira, com relativamente fácil implementação em freeFEM++.

Referências

- [1] J. Christel, J. Howell “SIAM Student Chapter Seminar. Finite Element Approximation of Partial Differential Equations Using FreeFem++”, Clemson: Department of Mathematics Sciences Clemson University, 2007. [consult. 9 Abr. 2010. Disponível em www.ccs.tulane.edu/~jchrispe/PDFdocuments/usc1.pdf.
- [2] P.-G. Ciarlet e P. Destuynder, “A justification of the two-dimensional linear plate model,” *Journal de mecanique*, volume 18, numero 2, (1979), 315-344.
- [3] P.-G. Ciarlet e S. Kesavan, “Two-dimensional approximations of a three-dimensional eigen-value problems in plate theory”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26 (1981), 145- 172.
- [4] E. Morais, *Simulação Numérica do Comportamento de Lajes*, TFM em Engenharia Civil, ISEL, 2010
- [5] O. Pironeau, F. Hccht e A. Le Hyaric, “Freefem++, version 3.9-2 (2d and 3d)”. Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris 2005. Disponível em ++.
- [6] S. P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1959.